Université de Fribourg — Département de Mathématiques
Prof. Ioan Manolescu — 14 Dec. 2018

Examen 2 – Introduction aux Probabilités, SA 2018

---

30 points sur 50 points correpondent à un 6.
Temps de travail de 10h15 à 12h00.

Nom et prénom :

Points : /50

Exercice 1. Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans l'obscurité. Il possède un trousseau de n clés d'allures semblables, mais une seule peut ouvrir la porte en question. Pour sélectionner la bonne clé, le gardien agite le trousseau et essaye une clé. S'il rate, il agite le trousseau à nouveau avant d'essayer une nouvelle fois une clé. Soit X la variable aléatoire décrivant le nombre d'essais jusqu'à l'apparition de la bonne clé.

(a) Décrire la variable aléatoire X. Quelle est la loi de X ? **(4 points)**

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$. **(6 points)**

Solution: *(a) On a* $X : \Omega \to \mathbb{N}$ *où* $\Omega = \{1, ..., n\}^{\mathbb{N}}$*, avec probabilité donnée par* $\mathbb{P}(\text{une clé}) = 1/n$*. Par le cours,* X *a une loi géométrique de parametre* $p = \frac{1}{n}$ *, donc on a* $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^{k-1}$*. (b)* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^{k-1} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k(\frac{n-1}{n})^{k-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1-\frac{n-1}{n})^2} = \frac{1}{n}n^2 = n$*.* $Var(X) = \mathbb{E}((X-n)^2) = \mathbb{E}(X^2-2nX+n^2) = \mathbb{E}(X(X-1)+X-2nX+n^2) = \mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X(1-2n))+n^2 = n^2+(1-2n)\mathbb{E}(X)+\sum\limits_{k>1} k(k-1)\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^{k-1} = n^2+(1-2n)n+\frac{1}{n}\frac{n-1}{n}\sum\limits_{k>1} k(k-1)(\frac{n-1}{n})^{k-2} = n - n^2 + \frac{n-1}{n^2}\frac{2}{(1-\frac{n-1}{n})^3} = n - n^2 + 2\frac{n-1}{n^2}n^3 = n - n^2 + 2(n-1)n = n(n+1)$. □

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{, pour } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

pour une constante réelle $c > 0$.

(a) Calculer la valeur de c. **(1 points)**

(b) Déterminer la fonction de répartition de X. **(1 points)**

(c) Calculer l'espérance de X. **(2 points)**

(d) Calculer la variance de X. **(2 points)**

Solution: *(a)* $1 = \int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int\limits_1^2 cx^2dx = c\frac{x^3}{3}|_1^2 = c\frac{7}{3}$*, donc* $c = 3/7$*. (b)* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$*. Alors, si* $x < 1$ *on a* $F_X(x) = 0$*, si* $1 \leq x \leq 2$ *on a* $F_X(x) = \int\limits_1^x f_X(t)dt = \frac{x^3-1}{7}$*, si* $x > 2$ *on a* $F_X(x) = 1$*. (c)* $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \int\limits_1^2 cx^3dx = 3/7 \cdot \frac{x^4}{4}|_1^2 = \frac{45}{28}$*. (d)* $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int\limits_1^2 3/7 \cdot x^4dx - (\frac{45}{28})^2 = \frac{93}{35} - (\frac{45}{28})^2 = \frac{291}{3920}$. □

Exercice 3. Soit $X \sim Unif[0; 1]$ et $Y = -\frac{1}{a}\ln(X)$ pour une constante $a > 0$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(Y)$, sans calculer la loi de Y. **(3 points)**
Indication : $\int_0^1 \ln(x)dx = -1$.

(b) Déterminer la loi de Y.
Indication : Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$. **(3 points)**

Solution: $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(-\frac{1}{a}\ln(X)) = \int\limits_{\mathbb{R}} Y f_X(x)dx = \int\limits_0^1 -\frac{1}{a}\ln(x)dx = -\frac{1}{a}\int\limits_0^1 \ln(x)dx = \frac{1}{a}$. *(b)* $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(-\frac{1}{a}\ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(\ln(X) \geq -at) = \mathbb{P}(X \geq \exp(-at)) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \exp(-at))$. *Comme* $\exp(-at) > 0$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *on a : si* $t \geq 0$ *on a* $\mathbb{P}(X \leq \exp(-at)) = \int\limits_0^{\exp(-at)} f_X(x)dx = \int\limits_0^{\exp(-at)} dx = \exp(-at)$, *si* $t < 0$ *on a* $\mathbb{P}(X \leq \exp(-at)) = \int\limits_0^1 dx = 1$. *Alors, si* $t \geq 0$ *on a* $\mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - \exp(-at)$, *et si* $t < 0$ *on a* $\mathbb{P}(Y \leq t) = 0$. *On conclude* Y *a une loi Expo*(a). □

Exercice 4. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires i.i.d. *Expo*(λ) pour un $\lambda > 0$. Soit $M = \min\{X_1, ..., X_n\}$ et $N = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Fixons un $t > 0$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(M \geq t)$. **(2 points)**

(b) Calculer $\mathbb{P}(N \leq t)$. **(2 points)**

(c) Calculer $\mathbb{P}(N \leq t \leq M)$. **(2 points)**

(d) Pourquoi la partie (c) montre que N et M ne sont pas indépendantes ? **(2 points)**

Solution:

(a) $\mathbb{P}(M \geq t) = \mathbb{P}(\{X_1 \geq t\} \cap ... \cap \{X_n \geq t\}) = \mathbb{P}(X_1 \geq t)^n = (e^{\lambda t})^n = e^{n\lambda t}$.

(b) $\mathbb{P}(N \leq t) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq t\} \cap ... \cap \{X_n \leq t\}) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n = (1 - e^{\lambda t})^n$.

(c) $\mathbb{P}(N \leq t \leq M) = \mathbb{P}(X_1 = ... = X_n = t) = \mathbb{P}(\{X_1 = t\} \cap ... \cap \{X_n = t\}) \leq \mathbb{P}(X_1 = t) = \int_t^t \lambda e^{\lambda s} ds = 0$, *donc* $\mathbb{P}(N \leq t \leq M) = 0$.

(d) Si N *et* M *sont indépendantes, alors* $\mathbb{P}(N \leq t \leq M) = \mathbb{P}(\{N \leq t\} \cap \{M \geq t\}) = \mathbb{P}(N \leq t)\mathbb{P}(M \geq t) = e^{n\lambda t}(1 - e^{\lambda t})^n > 0$. *Mais la partie (c) montre que* $\mathbb{P}(N \leq t \leq M) = 0$.

□

Exercice 5. Soient $N, X_1, X_2, ..., X_n, ...$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, N étant indépendante de $X_1, X_2 ..., X_n, ...$ On suppose que N admet l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et que $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, $\forall n$. On considère la somme aléatoire

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

des N premières variables aléatoires $X_1, ..., X_N$. Prouver que $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mu$. **(10 points)**

Indication : Afin de calculer $\mathbb{E}(\sum\limits_{n=1}^{N} X_n)$, *utiliser la formule de probabilité totale en conditionnant par rapport à la valeur de* N.

Solution: *Selon un théorème vu au cours,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N) &= \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} X_n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} X_n | N = k)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{k} X_n)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{E}(X_n)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \sum_{n=1}^{k} \mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \cdot k\mu \\
&= \mu \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(N = k) \\
&= \mu\mathbb{E}(N).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité peut se prouver ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} X_n) &= \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{N} X_n = l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{N} X_n = l) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{N} X_n = l | N = k)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{k} X_n = l)\mathbb{P}(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{k} X_n = l) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{k} X_n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} X_n | N = k).
\end{aligned}$$

□

Exercice 6. Soient $X_1, ..., X_{1000}$ des variables aléatoires i.i.d. avec

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{, avec probabilité } \frac{1}{2}, \text{ et} \\ -1 & \text{, avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Considérons la somme $S_{1000} = \sum_{n=1}^{1000} X_n$.

(a) À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, trouver une borne $c > 0$ telle que $\mathbb{P}(S_{1000} \geq 100) \leq c$. **(7 points)** *Indication : D'abord, prouver que* $\mathbb{P}(S_{1000} \geq 100) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big(|S_{1000} - \mathbb{E}(S_{1000})| \geq 100\big)$.

(b) Le résultat du point (a) est $c = \frac{1}{20}$. Si $X_1, ..., X_n$ désignent des lancées de pièces, comment peut-on interpréter le résultat du (a) ? **(3 points)**

Solution:

(a) *Tout d'abord, on voit que* $\mathbb{E}(S_{1000}) = \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{1000} X_n) = \sum_{n=1}^{1000} \mathbb{E}(X_n) = 1000 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 0$. *On voit facilement que* $\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S = -k)$ *par le fait que* $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. *Donc,* $\mathbb{P}(S_{1000} \geq 100) = \mathbb{P}(S_{1000} \leq -100)$. *Par conséquent,* $\mathbb{P}(S_{1000} \geq 100) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_{1000}| \geq 100) = \mathbb{P}(|S_{1000} - \mathbb{E}(S_{1000})| \geq 100)$. *L'inégalité de Chebyshev,*

$$\mathbb{P}(|S_{1000} - \mathbb{E}(S_{1000})| \geq 100) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_{1000})}{100^2}.$$

Par indépendence des X_n, $\mathrm{Var}(S_{1000}) = 1000 \cdot \mathrm{Var}(X_1)$. *On a* $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] = \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(1) = 1$. *Donc,* $\mathrm{Var}(S_{1000}) = 1000$ *et par conséquent* $\mathbb{P}(|S_{1000} - \mathbb{E}(S_{1000})| \geq 100) \leq \frac{1}{10}$. *Donc,*

$$\mathbb{P}(S_{1000} \geq 100) \leq \frac{1}{20}.$$

(b) *En lancant une pièce 1000 fois, on a moins de 5 % de chance d'obtenir pile au moins 100 fois plus que d'obtenir face. Donc, la probabilité d'obtenir plus de 550 piles en 1000 lancés de pièces est plus petite que 5 %.*

□